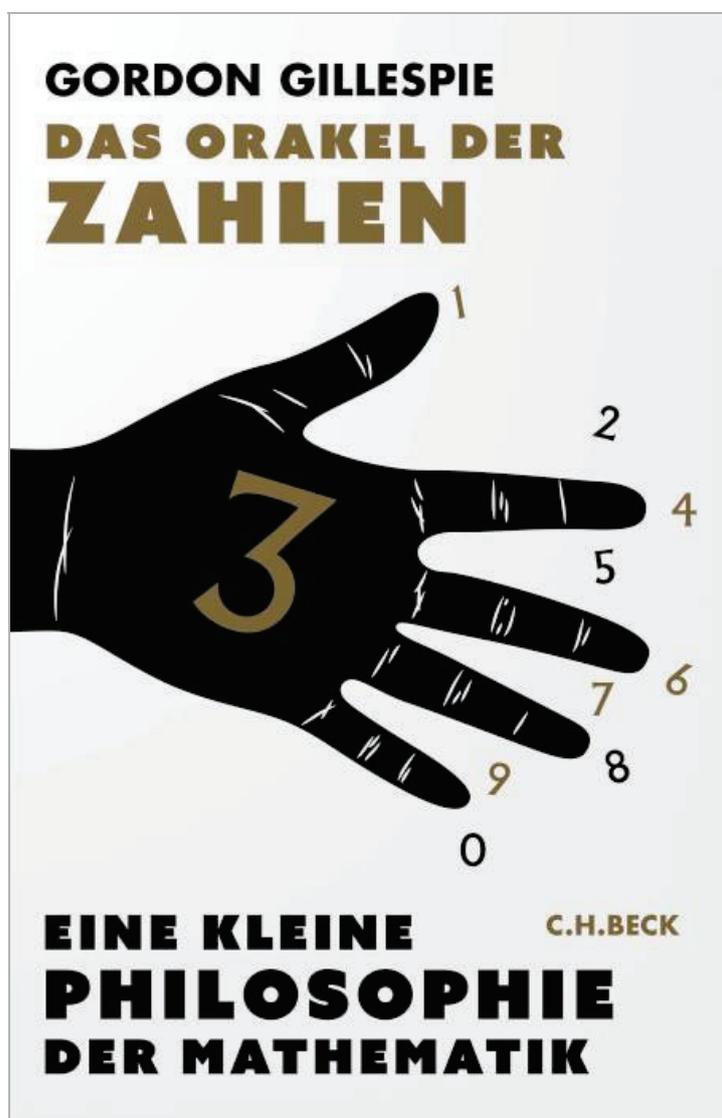


Zusatzmaterial



Gordon Gillespie
Das Orakel der Zahlen
Eine kleine Philosophie der Mathematik

2023. 303 S., mit 48 Illustrationen
ISBN 978-3-406-79883-2

Weitere Informationen finden Sie hier:
<https://www.chbeck.de/34606567>

© Verlag C.H.Beck oHG, München
Diese Leseprobe ist urheberrechtlich geschützt.
Sie können gerne darauf verlinken.

Zusatzmaterial zum Orakel der Zahlen

Kapitel 1

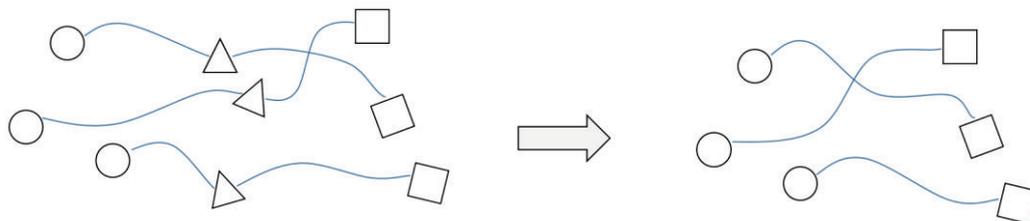
Geschichte der Mathematik

Im ersten Teil des Buches habe ich die wahre geschichtliche Entwicklung grundlegender mathematischer Ideen teilweise bis zur Unkenntlichkeit entstellt. Insbesondere die Entstehung der Zahlen aus der Praxis des Zählens heraus hat selbstverständlich so, wie im ersten Kapitel dargestellt, nie stattgefunden. Kleines Fuchsohr, Rundes Eulenaug und die Zapfen-Weise hat es nie gegeben. Doch der springende Punkt ist: es hätte sie geben können. Und hätte es sie gegeben und hätten spätere Generationen sich an sie erinnert, so wäre das Wechselverhältnis von Zahlen, Rechnen und Zählen nie zu dem großen Mysterium geworden, das noch heute für so viel Verwirrung sorgt.

Für ein getreueres Bild von den tatsächlichen ideengeschichtlichen Entwicklungen empfiehlt sich der (unbegreiflicherweise nicht auf Deutsch erhältliche) Klassiker schlechthin zur Geschichte der Mathematik: Kline, Morris: *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford University Press, 1972. Eine deutschsprachige Alternative, die, wie im Vorwort angekündigt, „einem breiten Leserkreis einen Überblick über die Entwicklung der Mathematik von ihren Anfängen bis zum heutigen Stand vor dem Hintergrund der kulturgeschichtlichen Entwicklung der Menschheit“ gibt, ist: Wüßing, Hans: *6000 Jahre Mathematik – Eine kulturgeschichtliche Zeitreise*, Springer, 2012.

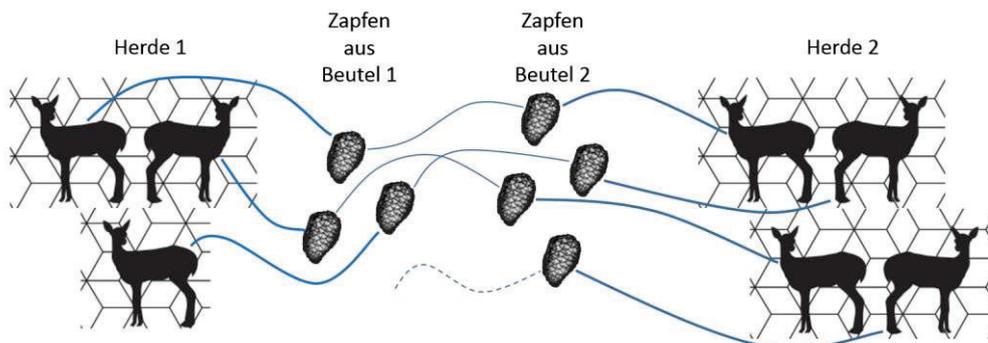
Transitivität der Eins-zu-eins-Beziehung

Folgende Abbildung veranschaulicht die Transitivität der Eins-zu-eins-Beziehung:



Wenn man die Kreise und die Dreiecke in eine Eins-zu-eins-Beziehung bringen kann, und ebenso die Dreiecke und die Quadrate, so lassen sich die Kreise und die Quadrate in eine Eins-zu-eins-Beziehung bringen, indem man jedem Kreis gerade dasjenige Quadrat zuordnet, das demjenigen Dreieck zugeordnet ist, das dem Kreis zugeordnet ist.

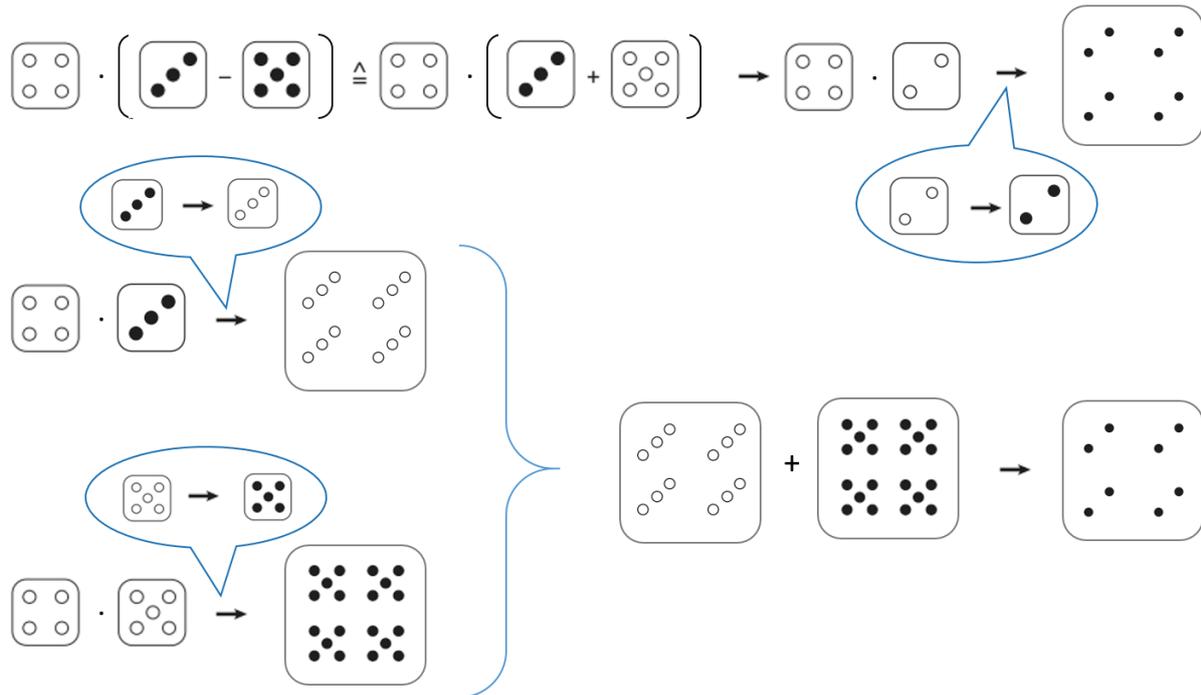
Die Zapfen-Weise nutzt die Transitivität der Eins-zu-eins-Beziehung doppelt, um zwei Herden von Hirschkühen „zahlenmäßig“ zu vergleichen – ganz ohne Zahlen:



Die beiden Herden wurden jeweils von Kleinem Fuchsohr und Großer Bärenatze in Eins-zu-Eins-Beziehung mit den Zapfen in ihren Beuteln gebracht. Wenn die Weise die Zapfen des einen Beutels mit einigen, aber nicht allen Zapfen des anderen Beutels in Eins-zu-eins-Beziehung bringen kann, so weiß sie daher (nach doppelter Anwendung der Transitivität): Die Hirschkühe der ersten Herde lassen sich mit einigen, aber nicht allen Hirschkühen der zweiten Herde in Eins-zu-eins-Beziehung bringen.

Distributivgesetz

Wie sich das Distributivgesetz aus dem Kreismengenbild ergibt, veranschaulicht folgende Abbildung am Beispiel der Gleichung $-4 \cdot (3 - 5) = -4 \cdot (3 + (-5)) = -4 \cdot 3 + -4 \cdot (-5) = -12 + 20 = 8$:



Die entscheidende Asymmetrie zwischen den hellen und den dunklen Kreismengen tritt hier dadurch zum Vorschein, dass bei den Multiplikationen die rechten Kreismengen zunächst umgefärbt werden müssen (anders als wenn jeweils links eine dunkle Kreismenge stünde).

Euklids Primzahlsatz

Euklids Beweis für die Existenz unendlich vieler Primzahlen wird üblicherweise, wie ich es auch getan habe, als Widerspruchsbeweis wiedergegeben. Tatsächlich zeigte er aber, dass für je endlich viele Primzahlen weitere Primzahlen existieren müssen. Beides läuft auf das Gleiche hinaus. Der Widerspruchsbeweis ist aber etwas eleganter. Hier selbiger nochmal etwas ausführlicher:

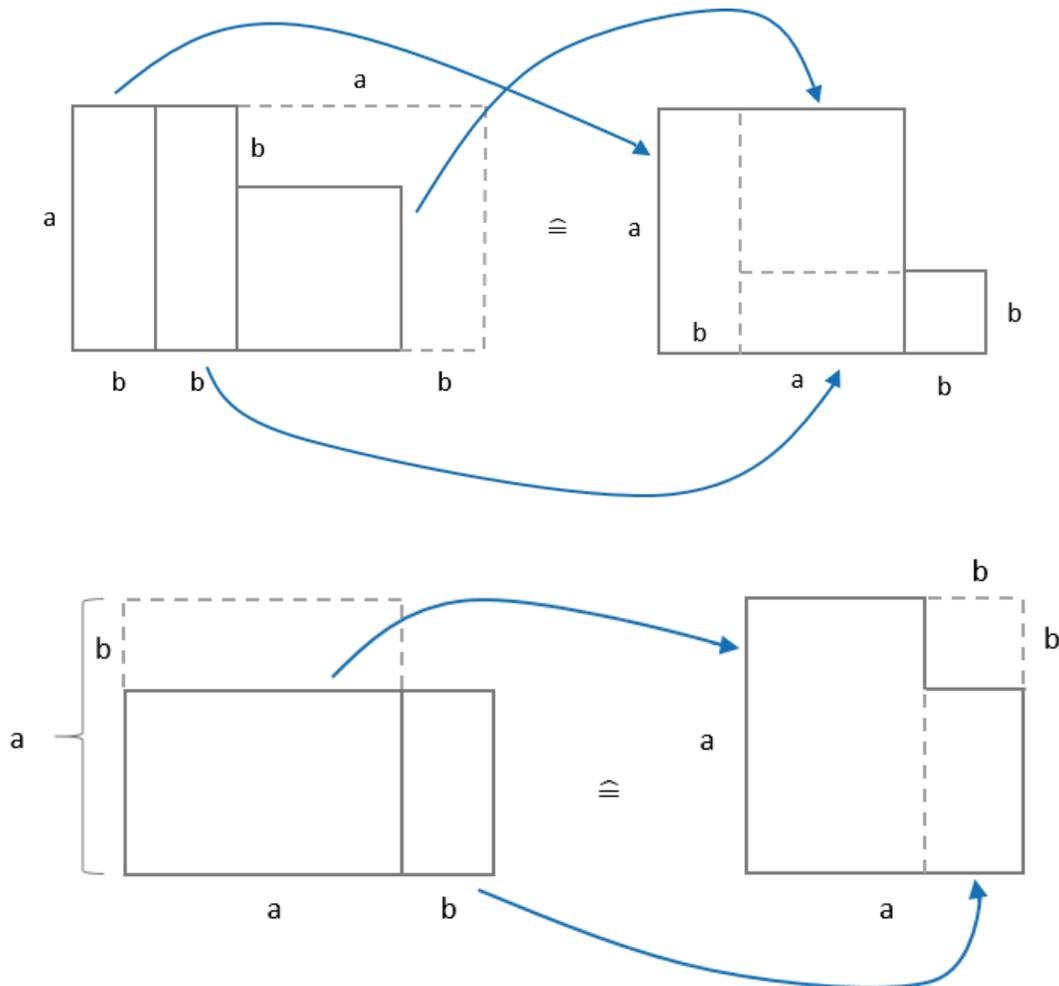
Eine Primzahl p ist eine natürliche Zahl größer als 1, die nur durch 1 und sich selbst teilbar ist. Das heißt, es gibt keine natürlichen Zahlen $k, l > 1$, für die gilt: $p = kl$. Angenommen es gäbe nur endlich viele Primzahlen, nämlich p_1, \dots, p_n . Dann wäre $p_1 \cdot \dots \cdot p_n + 1$ keine Primzahl (da offenbar größer als jede der Zahlen p_1, \dots, p_n und somit mit keiner dieser Zahlen identisch). Somit gälte $p_1 \cdot \dots \cdot p_n + 1 = kl$ mit $k, l > 1$. Hierbei kann angenommen werden, dass k eine Primzahl ist. (Sonst teilen wir einfach die Zahl k durch ihren größten echten Teiler und multiplizieren l mit diesem.) Das heißt, k ist mit einer der Primzahlen p_i ($i = 1, \dots, n$) identisch. Doch das kann nicht sein. Denn aus $p_1 \cdot \dots \cdot p_n + 1 = p_i l$ folgt: $1 = p_i l - p_1 \cdot \dots \cdot p_n = p_i(l - m)$, wobei m das Produkt aller Primzahlen außer p_i sei. (1 kann kein

Vielfaches einer natürlichen Zahl $p_i > 1$ sein.) Ergo muss die Annahme falsch sein. Das heißt, es muss unendlich viele Primzahlen geben.

Kapitel 2

Zweite und dritte Binomische Formel

Die geometrischen Pendanten der zweiten und der dritten Binomischen Formel $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \Leftrightarrow (a - b)^2 + 2ab = a^2 + b^2$ bzw. $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ lassen sich ebenso leicht beweisen wie das der ersten:

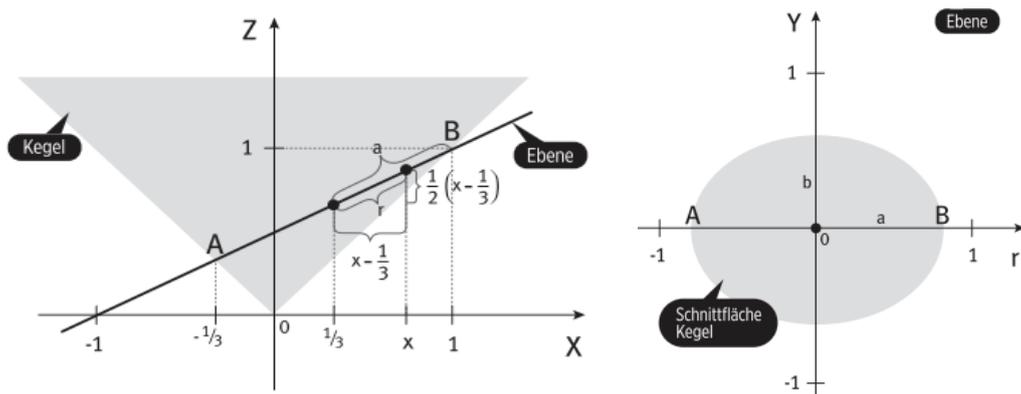


Aus der dritten Binomischen Formel ergibt sich übrigens ein netter Rechenrick: Haben Sie sich das Quadrat der 17 irgendwann einmal eingeprägt? Wenn nicht, so könnten Sie es im Kopf zum Beispiel so ausrechnen: $17^2 = 17 \cdot 10 + 17 \cdot 7 = 170 + 10 \cdot 7 + 7^2 = 170 + 70 + 49 = 289$. Schneller geht es aber mit der wie folgt umgestellten Formel: $a^2 = (a + b)(a - b) + b^2$. Sie brauchen nur im Kopf $b = 3$ zu setzen und so zu rechnen: $17^2 = (17 + 3)(17 - 3) + 3^2 = 20 \cdot 14 + 9 = 280 + 9 = 289$.

Das heißt, man wählt b so, dass man ein möglichst einfaches Produkt mit einem „runden“ Faktor erhält, zu dem man nur noch eine einfache Quadratzahl hinzuaddieren muss. Zwei weitere Beispiele verdeutlichen es: $88^2 = 100 \cdot 76 + 12^2 = 7.600 + 144 = 7.744$ und $983^2 = 1.000 \cdot 966 + 17^2 = 966.289$.

Diesen Rechenrick kenne ich aus: Benjamin, Arthur und Shermer, Michael: *Mathe-Magie – Verblüffende Tricks für blitzschnelles Kopfrechnen und ein phänomenales Zahlengedächtnis*, Heyne, 2007.

Rechnerischer Beweis der Ellipsenförmigkeit des Kegelschnitts



Nach dem Satz des Pythagoras gilt: $r = \sqrt{\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(x - \frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{4}\left(x - \frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}\left(x - \frac{1}{3}\right)$. Und daraus folgt umgekehrt: $x = \frac{2}{\sqrt{5}}r + \frac{1}{3}$. Ferner gilt für die Punkte auf der Ebene und die auf der Kegeloberfläche: $z = \frac{1}{2} + \frac{x}{2}$ bzw. $x^2 + y^2 = z^2$.¹ Die Punkte auf dem Rand der Schnittfläche erfüllen beide Bedingungen, sodass für sie nun gilt:

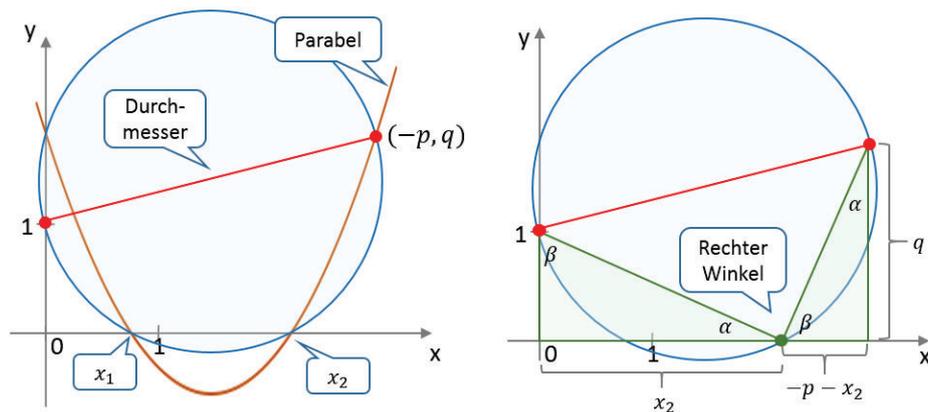
$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= \frac{1}{4}(x^2 + 2x + 1) \Leftrightarrow \\ 3x^2 - 2x + 4y^2 &= 1 \Leftrightarrow \\ \left(\sqrt{3}x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - \frac{1}{3} + 4y^2 &= 1 \Leftrightarrow^2 \\ \left(\sqrt{3}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}r + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 4y^2 &= \frac{4}{3} \Leftrightarrow \\ \left(\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}}r + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 4y^2 &= \frac{4}{3} \Leftrightarrow \\ \frac{4 \cdot 3}{5}r^2 + 4y^2 &= \frac{4}{3} \Leftrightarrow \\ \frac{9}{5}r^2 + 3y^2 &= 1 \end{aligned}$$

Veranschaulichung der pq-Formel

Ein anschauliches Bild für die pq-Formel liefert der *Carlyle-Kreis* – benannt nach Thomas Carlyle, einem Viktorianischen Schriftsteller und Historiker, für den die Mathematik trotzdem kein Buch mit sieben Siegeln war:

¹ Die erste Gleichung besagt, dass die Schnittebene aus der xy-Ebene durch Anheben um $\frac{1}{2}$ und Drehung um 30° um die y-Achse gegen den Uhrzeigersinn hervorgeht ($\sin(30^\circ) = \frac{1}{2}$). Und die zweite Gleichung besagt, dass bei einem horizontalen Schnitt durch den Kegel auf der Höhe z die resultierende kreisförmige Schnittfläche gerade den Radius z hat. Versuchen Sie, es im Geiste zu visualisieren.

² Hier kommt der simple, aber effektive Trick des „quadratischen Erweiterns“ zum Einsatz. Wenn anstelle von „ $3x^2 - 2x$ “ der Ausdruck „ $3x^2 - 2x + \frac{1}{3}$ “ stünde, so könnten wir diesen mittels der zweiten Binomischen Formel zu „ $\left(\sqrt{3}x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2$ “ vereinfachen. Hierzu fehlt uns ja aber nur „ $+\frac{1}{3}$ “. Also addieren wir ein Drittel und ziehen gleich wieder ein Drittel ab.



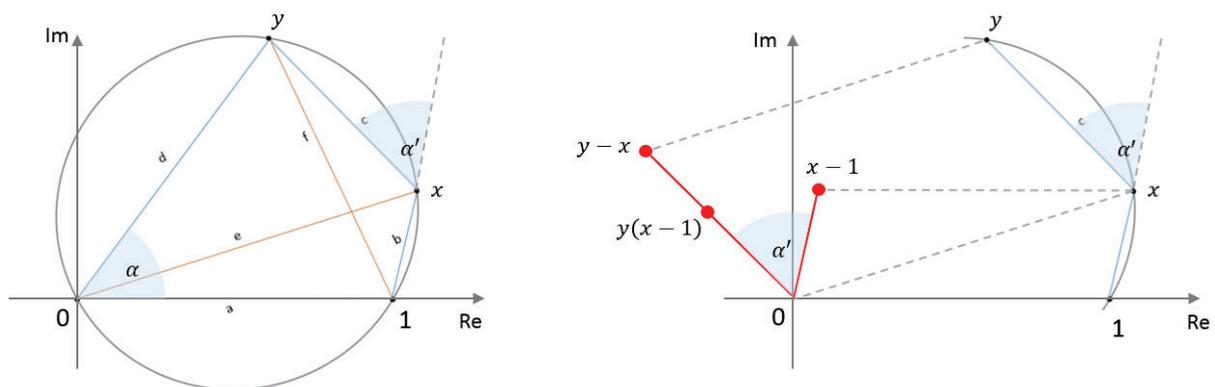
Die pq-Formel liefert für die Gleichung $x^2 + px + q = 0$ die Lösungen: $x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$. Links ist dargestellt, wie man (für geeignete Werte von p und q) die beiden Lösungen als Schnittpunkte eines Kreises, des Carlyle-Kreises, mit der x-Achse erhält. Man muß hierzu lediglich den Punkt mit den Koordinaten $(-p, q)$ einzeichnen und diesen mittels einer geraden Strecke mit dem Punkt mit den Koordinaten $(0, 1)$ verbinden. Dann zieht man den Kreis mit dieser Strecke als Durchmesser – fertig!

Die rechte Darstellung veranschaulicht anhand der zweiten Lösung x_2 , weshalb dieses elementar-geometrische Vorgehen funktioniert: Nach dem Satz des Thales bilden die rot bzw. grün markierten Punkte ein rechtwinkliges Dreieck. Somit weisen die beiden grünen Dreiecke gleiche Winkel auf, und deshalb gilt nach einem der Strahlensätze: $\frac{1}{x_2} = \frac{-p-x_2}{q}$. Und daraus folgt: $x_2^2 + px_2 + q = 0$; ganz analog für x_1 . Versuchen Sie gerne zur Übung, darüber hinaus die pq-Formel abzuleiten.³

„Warum lernt man sowas nicht in der Schule?!“, fragt man sich. Ich weiß es auch nicht. Ich weiß nur, dass ich früher viel mehr mit der Formel hätte anfangen können, wenn sie nicht einfach vom Himmel gefallen, sondern anschaulich, geometrisch begründet worden wäre.

Beweis der Geometriaufgabe vom Anfang des Kapitels

Der folgende Beweis der Aufgabe mittels komplexer Zahlen findet sich in etwas allgemeinerer Form in den *Problemlöse-Strategien* von Arthur Engel:



³ Mit dem Satz des Pythagoras kann man zunächst die Länge des Durchmessers bestimmen. Dann lässt man vom Kreismittelpunkt – der übrigens die Koordinaten $(-\frac{p}{2}, \frac{q+1}{2})$ besitzt – das Lot auf die x-Achse fallen. Anschließend kann man wieder den Satz des Pythagoras auf zwei geeignete Dreiecke anwenden.

Es soll gezeigt werden: $ef = ac + bd$. Hierzu erklären wir a zur Einheitsstrecke und betten das ganze Ensemble, wie links dargestellt, in die komplexe Zahlenebene ein. Die Behauptung läuft so auf folgendes hinaus:⁴ $|x| \cdot |y - 1| = 1 \cdot |y - x| + |x - 1| \cdot |y|$.

Wie gesehen, gilt gemäß der geometrischen Entsprechung der Multiplikation von komplexen Zahlen, dass der Betrag des Produkts zweier Zahlen gleich dem Produkt der Beträge der Zahlen ist. Somit wollen wir zeigen: $|x(y - 1)| = |y - x| + |y(x - 1)|$. Das Problem hierbei ist, dass in der Regel die Summe der Beträge zweier Zahlen ungleich dem Betrag der Summe der Zahlen ist, es sei denn beide Zahlen haben dieselbe Richtung. Genau dies ist aber für $y - x$ und $y(x - 1)$ der Fall. Denn, wie die rechte Abbildung veranschaulicht, hat $y - x$ die Richtung von $x - 1$ zzgl. α' , und gemäß der geometrischen Entsprechung der Multiplikation hat $y(x - 1)$ die Richtung von $x - 1$ zzgl. der Richtung von y , nämlich α (linke Abbildung); ferner stimmen α und α' überein, da gegenüberliegende Winkel in einem Viereck, dessen Eckpunkte auf einem gemeinsamen Kreis liegen, in Summe 180° ergeben.⁵ Wir können somit weiter vereinfachen:

$$|y - x| + |y(x - 1)| = |y - x + y(x - 1)| = |yx - x| = |x(y - 1)|$$

Die zu beweisende Gleichung ist also wahr.

Minimalflächen

Wer sich nicht mit der Umschreibung von Minimalflächen mittels Bergwanderwegen zufriedengeben möchte, sei beispielsweise verwiesen auf: Bär, Christian: *Elementare Differentialgeometrie*, De Gruyter, 2010. Darin werden nicht nur Langranges und Meusniers Erkenntnisse zu Minimalflächen, sondern u.a. auch der in der Einleitung erwähnte Satz von Gauß zur intrinsischen Krümmung von Flächen – das *Theorema egregium*⁶ – in gut verständlicher Weise von den Grundlagen der Euklidischen Geometrie ausgehend entwickelt.

Kapitel 3

Division mit Rest

Allgemein lautet der Algorithmus zur Bestimmung der Dezimalentwicklung des Bruchs n/m :

1. Bestimme k_0 und $r_0 < m$ so, dass $n = k_0m + r_0$.
2. Bestimme k_1 und $r_1 < m$ so, dass $10r_0 = k_1m + r_1$.
3. Bestimme k_2 und $r_2 < m$ so, dass $10r_1 = k_2m + r_2$.
4. Fahre solange entsprechend fort, bis einer der „Reste“ r_0, r_1, r_2, \dots den Wert 0 oder denselben Wert wie einer der vorangegangenen Reste annimmt.

Da die Reste alle kleiner als m sind, sind die Zahlen k_1, k_2, k_3, \dots alle kleiner als 10. Ferner zeigt man durch sukzessives Einsetzen leicht:

$$\frac{n}{m} = k_0 + \frac{r_0}{m} = k_0 + \frac{k_1}{10} + \frac{r_1}{10m} = k_0 + \frac{k_1}{10} + \frac{k_2}{100} + \frac{r_2}{100m} = \dots$$

Die den Zahlen k_1, k_2, k_3, \dots entsprechenden Ziffern besetzen somit die Nachkommastellen der Dezimalzahl von n/m . Falls irgendwann ein Rest von 0 erscheint, endet die Dezimalzahl bzw. Ziffernfolge. Das ist zum Beispiel für den Bruch $25/8$ der Fall; für diesen ergeben sich sukzessive folgende Werte:

⁴ Vorsicht, x und y sind jetzt *nicht* Koordinaten eines Punktes, sondern komplexe Zahlen, die jeweils selbst zwei Koordinaten bzw. Real- und Imaginärteil aufweisen.

⁵ Verbinden Sie den Mittelpunkt des Kreises mit den vier Ecken. Dadurch erhalten Sie vier gleichschenklige Teildreiecke. Anhand dieser Dreiecke überzeugen Sie sich schnell von der Wahrheit der Aussage.

⁶ Ein wahrlich „erstaunlicher Satz“.

$k_0 = 3, r_0 = 1; k_1 = 1, r_1 = 2; k_2 = 2, r_2 = 4; k_3 = 5, r_3 = 0$. Das heißt, $3/8 = 3,125$. Im anderen Fall erscheint irgendwann ein von 0 verschiedener Rest zum zweiten Mal, sodass sich auch die weitere Abfolge der Reste wiederholt. Dies ist beispielsweise für $1/7$ der Fall, wobei sich folgende Werte ergeben: $k_0 = 0, r_0 = 1; k_1 = 1, r_1 = 3; k_2 = 4, r_2 = 2; k_3 = 2, r_3 = 6; k_4 = 8, r_4 = 4; k_5 = 5, r_5 = 5; k_6 = 7, r_6 = 1; \dots$ Es gilt also: $1/7 = 0,142857142857142857\dots$

Geschwindigkeit der frei fallenden Kugel

Der Höhenunterschied h der Kugel, die der Hobbyphysiker vom Turm fallen lässt, nimmt im infinitesimalen Zeitabschnitt $(t, t + dt)$ um folgendes Infinitesimal zu: $dh = h(t + dt) - h(t) = (t + dt)^2 - t^2 = t^2 + 2tdt + dt^2 - t^2 = 2tdt + dt^2$. Somit folgt für die Momentan-Geschwindigkeit der Kugel: $\frac{dh}{dt} = \frac{2tdt + dt^2}{dt} = 2t + dt$. Sobald dt nicht mehr im Nenner auftritt, können wir es gleich 0 setzen, und wir erhalten dann: $\frac{dh}{dt} = 2t$.

Länge des Parabelstücks

Wegen $\frac{dy}{dx} = 2x$ gilt:

$$\int_a^b \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_a^b \sqrt{dx^2 + dx^2 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_a^b \sqrt{1 + 4x^2} dx$$

Sei nun f eine Stammfunktion von $\sqrt{1 + 4x^2}$, sodass also gilt: $\frac{df}{dx} = \sqrt{1 + 4x^2}$. Dann beträgt die gesuchte Länge: $\int_a^b \sqrt{1 + 4x^2} dx = \int_a^b \frac{df}{dx} dx = \int_a^b df$.

Die analoge Näherungssumme $\sum_{m=1}^n \Delta f_m$ mit $\Delta f_m = f(x_m) - f(x_{m-1})$ und $a = x_0 < \dots < x_n = b$ lässt sich leicht berechnen: $\sum_{m=1}^n \Delta f_m = f(x_1) - f(x_0) + f(x_2) - f(x_1) \dots + f(x_n) - f(x_{n-1}) = f(x_n) - f(x_{n-1}) + f(x_{n-1}) - f(x_{n-2}) + f(x_{n-2}) - \dots - f(x_1) + f(x_1) - f(x_0) = f(x_n) - f(x_0) = f(b) - f(a)$. Diese Eigenschaft, allein durch „Auswertung an den Rändern“ bestimmt werden zu können, unterstellen wir nun einfach auch für das Integral, sodass gilt: $\int_a^b df = f(b) - f(a)$.

So einleuchtend diese Überlegung auch ist, so kann sie doch wegen des unklaren Status der Größen dx, dy und df nicht restlos überzeugen. Durch die geeigneten Definitionen der Ableitung und des Integrals mittels des Grenzwertbegriffs von Bolzano und Cauchy lässt sie sich aber letztlich in legitime Rechnungen mit *echten* Zahlen überführen.

Hier ist freilich anzumerken, dass es Abraham Robinson in den Sechzigerjahren des letzten Jahrhunderts gelungen ist, eine konsistente Theorie von Infinitesimalen – die sogenannte *Nichtstandard-analysis* – zu entwickeln, mit der auf einmal doch sinnvoll mit „unendlich kleinen, aber nicht verschwundenen“ Größen gerechnet werden kann. Eine empfehlenswerte (allerdings nur auf Englisch erhältliche) Einführung mit einer historischen Einordnung ist: Goldblatt, Robert: *Lectures on the Hyperreals – An Introduction to Nonstandard Analysis*, Springer, 1998.

Abzählbarkeit der rationalen Zahlen

Die Eins-zu-eins-Beziehung zwischen den (positiven) rationalen und den natürlichen Zahlen gemäß Cantors Diagonalverfahren exakt anzugeben, ist ein wenig mühsam. Aber mit dem *Äquivalenzsatz*, ebenfalls von Cantor (und Bernstein und Schröder), lässt sich die Abzählbarkeit der rationalen Zahlen ganz einfach zeigen: Nach dem Äquivalenzsatz besteht eine Eins-zu-eins-Beziehung zwischen zwei Mengen A und B , falls sich jedes Element von A eindeutig einem Element von B zuordnen lässt und umgekehrt. Hierbei besagt „eindeutig“, dass keinen zwei Elementen der einen Menge ein und dasselbe

Element der anderen Menge zugeordnet wird. Umgangssprachlich besagt der Äquivalenzsatz somit etwas sehr Einleuchtendes: Wenn B mindestens so viele Elemente hat wie A, und A mindestens so viele Elemente wie B, dann haben A und B gleich viele Elemente.

Ordne nun jeder natürlichen Zahl eindeutig sich selbst (als rationale Zahl) zu. Und ordne für zwei beliebige teilerfremde natürliche Zahlen n und m den beiden rationalen Zahlen $\frac{n}{m}$ und $-\frac{n}{m}$ die natürlichen Zahlen $2^n 3^m$ bzw. $5^n 7^m$ zu. Letztere Zuordnung ist ebenfalls eindeutig, da sich jede natürliche Zahl nur in *einer* Weise als Produkt $p_1^{k_1} \cdots p_j^{k_j}$ von Potenzen von Primzahlen $p_1 < \cdots < p_j$ darstellen lässt. (Siehe zum Beispiel Ziegenbalg, Jochen: *Elementare Zahlentheorie – Beispiele, Geschichte, Algorithmen*, Springer, 2015.) Bleibt nur noch die Zahl 0; dieser ordne man einfach die 1 zu.

Überabzählbarkeit der reellen Zahlen

Im Buch ist der Beweis für die Überabzählbarkeit der reellen Zahlen der besseren Anschaulichkeit halber nicht ganz korrekt wiedergegeben. Etwas unsauber ist vor allem der Umgang mit der Uneindeutigkeit der Binärentwicklung.⁷ Hier nun die gereinigte Version:

Wir zeigen zunächst, dass es mehr (im Sinne von Anzahl) Mengen natürlicher Zahlen gibt als natürliche Zahlen selbst. Angenommen, dem wäre nicht so, sodass wir erstere der Reihe nach „abzählen“ könnten: M_1, M_2, M_3, \dots Dann könnten wir die Menge $M = \{n | n \notin M_n\}$ bilden, sprich die Menge aller natürlichen Zahlen, die jeweils nicht in der Menge enthalten sind, die an der entsprechenden Stelle der Auflistung steht.⁸ Doch M könnte nirgendwo in der Liste stehen. Denn wenn $M = M_n$, so gilt entweder: $n \in M \Rightarrow n \notin M_n = M$ oder $n \notin M \Rightarrow n \in M_n = M$ – in beiden Fällen Widerspruch!

Im zweiten Schritt richten wir unser Augenmerk auf diejenigen Mengen natürlicher Zahlen, die nur endlich viele von diesen *nicht* enthalten, und mit dem Äquivalenzsatz von Cantor zeigen wir: Es gibt nur abzählbar unendlich viele solcher Mengen. Denn wenn eine solche Menge genau die Zahlen n_1, n_2, \dots, n_m nicht enthält, können wir ihr eindeutig das Produkt $p_{n_1} p_{n_2} \cdots p_{n_m}$ zuordnen, wobei p_1, p_2, p_3, \dots die der Größe nach angeordneten Primzahlen seien.⁹

Es gibt also *überabzählbar* unendlich viele Mengen natürlicher Zahlen, die unendlich viele von diesen nicht enthalten. Und wie man unschwer zeigen kann, ist für jede solche Menge $\{n_1, n_2, n_3, \dots\}$ die Binärentwicklung $\sum_{n=1}^{\infty} a_n 2^{-n}$ mit $a_{n_1} = a_{n_2} = a_{n_3} = \cdots = 1$ und $a_n = 0$ für alle übrigen n eindeutig. Das heißt, die Zuordnung bringt diese Mengen in eine Eins-zu-eins-Beziehung mit reellen Zahlen zwischen 0 und 1. Somit gibt es auch von diesen *mehr* als „nur“ abzählbar unendlich viele.

„Grundlagenkrise(n)“

Im Buch wird nicht umsonst an mehreren Stellen aus der *Erfahrung Mathematik* von Davis und Hersch zitiert. Neben vielen – wie es im Klappentext heißt – „erkenntnisreichen Meditationen“ über verschiedenste Aspekte der Mathematik findet sich darin insbesondere ein ebenso prägnanter wie erhellender historischer Abriss zu ihren „Grundlagen – wie gewonnen, so zerronnen“. So weisen die Autoren darauf hin, dass die Mathematik nicht erst mit Russells Entdeckung seiner selbstwidersprüchlichen „Menge“ in eine (vermeintliche) Grundlagenkrise geriet. Die erste Krise ereignete sich mit der Entdeckung Nicht-euklidischer Geometrien, die das scheinbar felsenfeste Fundament unserer „natürlichen“ geometrischen Anschauung – von dem insbesondere Kant ausgegangen war – erschütterte. Aber nicht nur das:

⁷ So lässt sich beispielsweise für $\frac{1}{2}$ die Entwicklung $\sum_{n=1}^{\infty} a_n 2^{-n}$ mit $a_1 = 1$ und $a_2 = a_3 = a_4 = \cdots = 0$ oder mit $a_1 = 0$ und $a_2 = a_3 = a_4 = \cdots = 1$ bestimmen.

⁸ Das heißt beispielsweise, wenn 3 kein Element von M_3 ist, so ist 3 ein Element von M , und wenn 4 ein Element von M_4 ist, so ist 4 kein Element von M .

⁹ Der Menge $\{1, 2, 4, 7, 8, 9, \dots\}$ etwa wird das Produkt $p_3 p_5 p_6 = 5 \cdot 11 \cdot 13 = 715$ zugeordnet.

Noch katastrophaler wirkte sich die Entwicklung der Analysis aus, welche nun die geometrische Intuition über-rundete, wie z.B. in der Entdeckung von raumfüllenden Kurven und stetigen, nirgends differenzierbaren Kurven. Diese Tiefschläge zeigten die Fragwürdigkeit der einzigen soliden Grundlage – der geometrischen Intuition – auf der die Mathematik nach allgemeiner Überzeugung geruht hatte.

Nur so ist zu verstehen, weshalb Mathematiker wie Dedekind überhaupt glaubten, die Geometrie und letztendlich alle anderen Zweige der Mathematik auf die Mengenlehre „reduzieren“ zu müssen.

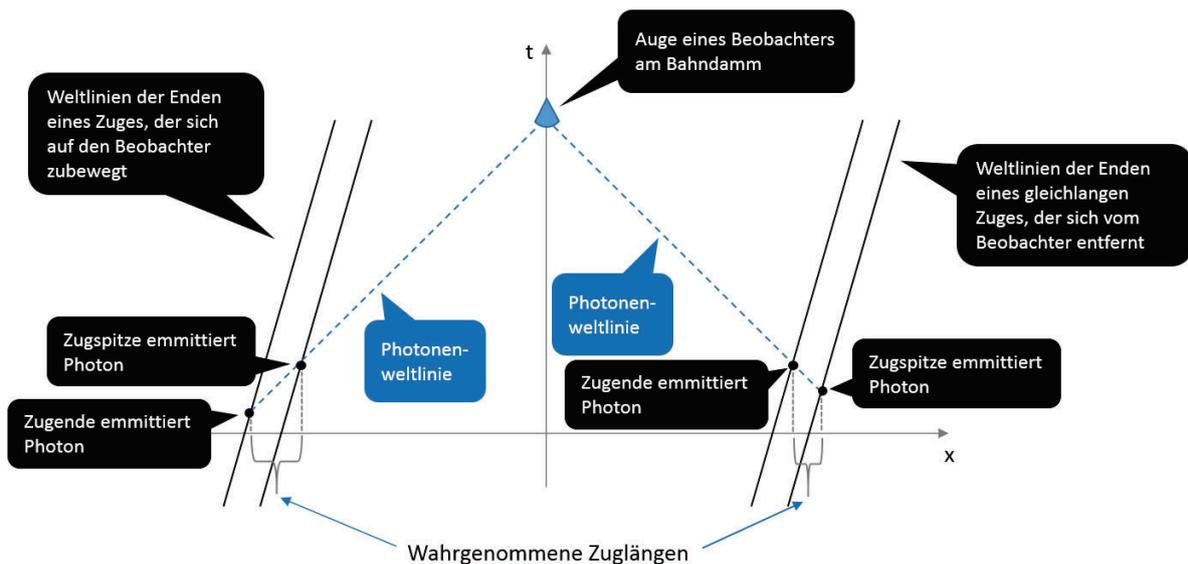
Doch nicht nur die Russel'sche Menge machte deutlich, dass die Mengenlehre, zumindest in ihrer naiven Cantorschen Form, nicht wirklich als alternative alleinige Basis taugt. Mit dem einfachen obigen Argument, wonach jede Menge (anzahlmäßig) mehr Teilmengen enthält, als sie selbst Elemente hat, zeigt sich auch die Selbstwidersprüchlichkeit der großen Schwester: der Menge aller Mengen. Denn wäre diese wirklich, was sie zu sein vorgibt, nämlich eine Menge, so müsste sie weniger Elemente besitzen, als sie Teilmengen enthält. Aber da sie ja *sämtliche* Mengen enthalten soll, muss sie auch all diese Teilmengen als Elemente enthalten, also mindestens so viele – Widerspruch.

Eine mathematisch gediegene und historisch informative Einführung in die Mengenlehre ist: Ebbinghaus, Heinz-Dieter: *Einführung in die Mengenlehre*, Springer, 2021.

Kapitel 4

Scheinbare Längenkontraktionen

Wie es auch in der klassischen Physik, ganz unabhängig von relativistischen Effekten, zur vermeintlichen Längenkontraktion eines vorbeifahrenden Zuges kommt, verdeutlicht folgende Abbildung:



Zwei Züge gleicher Länge fahren mit gleicher konstanter Geschwindigkeit den Bahndamm entlang. Ein Beobachter am Gleis im Bahnhof sieht den Zug links auf sich zukommen, den rechts sich von ihm entfernen. Die Stellen am Bahndamm, von denen aus zwei Photonen der beiden Enden des linken Zuges gleichzeitig ins Auge des Beobachters fallen, haben einen größeren Abstand als die wahre Länge des Zuges; für den rechten Zug verhält es sich umgekehrt. Dies vermittelt dem Beobachter den rein optischen Eindruck, der linke Zug sei länger als der rechte. Bei korrekter „Rückrechnung“ erkennt der Beobachter aber, dass beide Züge gleichlang sind.

In dem zitierten Einführungstext des Ehepaars Ruder findet sich übrigens ein interessanter Abschnitt zum „Aussehen schnell bewegter Körper“. Darin wird noch näher dargelegt, inwiefern man grundsätzlich zwischen den wahren Kontraktionseffekten der Speziellen Relativitätstheorie und den

bloß wahrgenommenen Verzerrungen aufgrund der endlichen Lichtgeschwindigkeit unterscheiden muss. Hierzu bemerken die Ruders:

Auch nachdem die spezielle Relativitätstheorie anerkannt und etabliert war, hat [...] über 50 Jahre niemand [die Unterscheidung] konsequent behandelt. Selbst der berühmte Physiker Gamov hat in seinem erstmals 1940 herausgegebenen Buch „Mr. Tompkins in Wonderland“ (deutscher Titel „Mr. Tompkins' seltsame Reise durch Kosmos und Mikrokosmos“, Verlag Vieweg 1984) die Erscheinungen der Lorentz-Kontraktion völlig falsch dargestellt, da er die Effekte der endlichen Lichtgeschwindigkeit einfach nicht bedacht hat.

Beschleunigung – Galilei vs. Lorentz

Beschleunigungen entsprechen zweiten Ableitungen, und unter der Galilei-Transformation gilt folgender Zusammenhang zwischen Bahnhof- und Zugsystem:¹⁰

$$\frac{d}{dt'} \frac{dx'}{dt'} = \frac{d}{dt} \frac{d(x-vt)}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} - v \right) = \frac{d}{dt} \frac{dx}{dt}$$

Das heißt, unter der Galilei-Transformation bzw. in der klassischen Mechanik ist die Beschleunigung eines Körpers zu einem bestimmten Zeitpunkt ein objektive, in allen Inertialsystemen eindeutige Größe. Unter der relativistischen Lorentz-Transformation gilt hingegen:

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{dx - vdt}{\lambda} / \frac{dt - \frac{v}{c^2} dx}{\lambda} = \frac{dx - vdt}{dt - \frac{v}{c^2} dx} = \frac{\frac{dx}{dt} - v}{1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}}$$

Ferner gilt:

$$\begin{aligned} \frac{dt}{dt'} &= \left(\frac{dt' + \frac{v}{c^2} dx'}{\lambda} \right) / dt' = \frac{1 + \frac{v}{c^2} \frac{dx'}{dt'}}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \left(1 + \frac{v}{c^2} \frac{\frac{dx}{dt} - v}{1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}} \right) = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt} + \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt} - \frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}} \\ &= \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\lambda^2}{1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}} = \frac{\lambda}{1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}} \end{aligned}$$

Und daraus folgt mit der allgemeinen „Quotientenregel“ $\frac{d}{dx} \frac{y}{z} = \frac{z \frac{dy}{dx} - y \frac{dz}{dx}}{z^2}$ aus der Schule:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt'} \frac{dx'}{dt'} &= \frac{dt}{dt'} \frac{d}{dt} \frac{\frac{dx}{dt} - v}{1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}} \\ &= \frac{\lambda}{1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}} \left(\left(1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt} \right) \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} - v \right) - \left(\frac{dx}{dt} - v \right) \frac{d}{dt} \left(1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt} \right) \right) / \left(1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt} \right)^2 \\ &= \frac{\lambda \left(\left(1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt} \right) + \left(\frac{dx}{dt} - v \right) \frac{v}{c^2} \right)}{\left(1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt} \right)^3} \frac{d}{dt} \frac{dx}{dt} = \frac{\lambda \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)}{\left(1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt} \right)^3} \frac{d}{dt} \frac{dx}{dt} \\ &= \frac{\lambda^3}{\left(1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt} \right)^3} \frac{d}{dt} \frac{dx}{dt} \end{aligned}$$

¹⁰ $\frac{dv}{dt} = 0$, da die Relativgeschwindigkeit v beider Systeme konstant ist.

Dies bestätigt, was diverse Weltlinien-Diagramme im Buch bereits vor Augen führten, nämlich dass Beschleunigung unter der Lorentz-Transformation ihren objektiven Status verliert. Lediglich gerade Weltlinienabschnitte weisen in allen Inertialsystemen dieselbe Beschleunigung auf, nämlich Null.

Relativistische Abstandsformel

Die relativistische Abstandsformel ergibt sich wie folgt:

$$\begin{aligned}\Delta x'^2 - \Delta ct'^2 &= \frac{(\Delta x - v\Delta t)^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{c^2 \left(\Delta t - \frac{v}{c^2} \Delta x\right)^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \\ &= \frac{\Delta x^2 - 2v\Delta x\Delta t + v^2\Delta t^2 - c^2\Delta t^2 + 2v\Delta x\Delta t - \frac{v^2}{c^2}\Delta x^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)(\Delta x^2 - c^2\Delta t^2)}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \\ &= \Delta x^2 - \Delta ct^2\end{aligned}$$

Zeitlose Photonen

Eine Auffälligkeit des Eigenzeitintegrals $\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2} dt$ ist die, dass demnach für die Passagiere eines Zuges, der eine Weile mit Lichtgeschwindigkeit ($dx/dt = c$) entlang des Bahndamms dahintraste, *keine* Zeit vergehen würde. Allerdings wurde ja postuliert und empirisch bestätigt, dass Züge, Reisende und sonstige Körper mit Masse niemals mit Lichtgeschwindigkeit dahingleiten können – im Bahnhof- oder irgendeinem anderen Inertialsystem. Doch für Photonen ist das nicht nur möglich, sondern charakteristisch. Photonen altern also nicht; sie bleiben ewig jung!

Lektüreempfehlungen

Kapitel 4 ist als eigenständige, ohne vorhergehende Zusatzlektüre allgemein verständliche Darstellung der geometrischen Grundlagen der Speziellen Relativitätstheorie gedacht. Für ein vertieftes und erweitertes Verständnis ist aber ein Blick in ausführlichere Werke zum selben und damit verwandten Themen unerlässlich:

- Unabdingbar ist zuallererst eine solide Kenntnis der klassischen Mechanik. Mein Lieblingsbuch hierzu ist: Taylor, John R.: *Klassische Mechanik*, Pearson, 2014. Im Gegensatz zu den meisten anderen Autoren von Einführungen in die klassische Mechanik begnügt sich Taylor nicht damit, im Wesentlichen nur die „Axiome“ von Newton wiederzugeben und vorzumachen, wie man daraus konkrete Problemlösungen ableitet. Taylor geht darüber hinaus ausführlich auf begriffliche Fragestellungen ein – insbesondere Kraft und Masse betreffend. So macht er deutlich, wie die abstrakten Begriffe der Theorie genau mit Leben zu füllen sind.
- Taylor widmet sich in einem Kapitel seines Mechanik-Buches auch der Speziellen Relativitätstheorie. Aber selbst ihm gelingt es meines Erachtens nicht wirklich, die im engeren Sinne physikalischen Aspekte der Theorie und deren rein geometrische Grundlagen sauber auseinander zu halten. Diesbezüglich empfiehlt sich die im Buch zitierte Abhandlung von Tim Maudlin. Als Philosoph geht Maudlin ausgiebig auf begriffliche Grundlagen ein, etwa die Frage, wie der Messvorgang für Länge und Dauer in konsistenter Weise relativistisch zu verstehen ist, oder die Frage, ob und, wenn ja, wie das Newtonsche Eimerexperiment mit relativistischen Grundprinzipien in Einklang zu bringen ist. Die Darstellung im Buch schuldet der Maudlins viel.
- Die Einführung in die Spezielle Relativitätstheorie als physikalischer Theorie im engeren Sinne von Hanns und Margret Ruder habe ich bereits empfohlen. Darin wird u.a. Wert darauf gelegt, die höherstufigen Teile der Theorie in einer Weise darzustellen, wie sie für die Allgemeine

Theorie unabdingbar ist, nämlich mithilfe von Tensoren. Diese mathematischen Gebilde werden in den allermeisten Physikbüchern, in denen sie auftreten, als vom Himmel gefallene, rein rechnerische Hilfsmittel eingeführt. Ihr eigentlicher Witz und dessen Bezug zu den grundlegenden Überlegungen Einsteins, die ihn überhaupt zur Allgemeinen Relativitätstheorie führten, bleiben in diesen Werken außen vor. Ich empfehle daher als Vorbereitung eine (leider nur auf Englisch erhältliche) mathematische Einführung in die Tensoranalysis: Grinfeld, Pavel: *Introduction to Tensor Analysis and the Calculus of Moving Surfaces*, Springer, 2013. Grinfeld gelingt es hervorragend, bei aller Abstraktheit des Themas dessen geometrische Wurzeln klar hervortreten zu lassen. So versteht der Neuling, *warum* Tensoren gerade die Eigenschaften haben, die sie im Rahmen der Allgemeinen Relativitätstheorie so unverzichtbar machen – nicht bloß, welche Eigenschaften das sind. Außerdem macht Grinfeld noch ausführlicher deutlich, als ich es im zweiten Kapitel konnte, inwiefern der naive Gebrauch von Koordinatensystemen einem echten Verständnis der jeweiligen geometrischen (oder physikalischen) Zusammenhänge im Weg stehen kann.

- Auf der Grundlage des Grinfeldschen Textes kann man es wagen, von den Speziellen in die Allgemeinen Sphären der Relativitätstheorie abzutauchen. Ich empfehle hierzu das (ebenfalls nur auf Englisch erhältliche) Standardwerk: Wald, Robert M.: *General Relativity*, The University of Chicago Press, 1984.

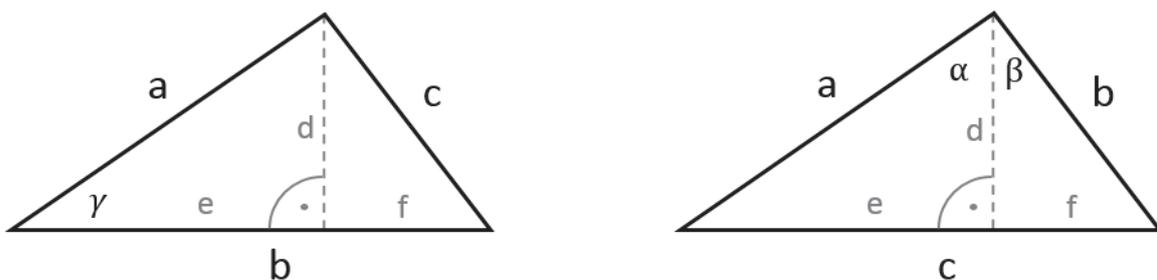
Kapitel 5

Geometrische Deutung der komplexen Multiplikation

Es lässt sich für beliebige Winkel (-weiten) α, β mit rein geometrischen Mitteln zeigen:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta) &= \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta\end{aligned}$$

Beispielsweise veranschaulicht folgende Abbildung die Grundidee für einen Beweis der zweiten Gleichung:



Mit den Bezeichnungen links und dem Satz des Pythagoras folgt:¹¹ $c^2 = f^2 + d^2 = (b - e)^2 + d^2$. Ferner gilt per Definition von Sinus und Kosinus: $d = a \cdot \sin\gamma$ und $e = a \cdot \cos\gamma$, und somit: $c^2 = (b - a \cdot \cos\gamma)^2 + a^2 \cdot \sin^2\gamma = b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma + a^2 \cdot \cos^2\gamma + a^2 \cdot \sin^2\gamma = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$.¹² Dies ist der *Kosinussatz*. Mit ihm und den Bezeichnungen rechts folgt nun: $a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\alpha + \beta) = c^2 = (e + f)^2 = (a \cdot \sin\alpha + b \cdot \sin\beta)^2 = a^2 \cdot \sin^2\alpha + 2ab \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta + b^2 \cdot \sin^2\beta \Rightarrow 2ab \cdot \cos(\alpha + \beta) = a^2(1 - \sin^2\alpha) + b^2(1 - \sin^2\beta) - 2ab \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta =$

¹¹ Wie im Geometriekapitel mehrfach betont, sind Gleichungen wie die folgenden originär als Aussagen über Flächengleichheiten bestimmter Quadrate und Rechtecke zu deuten (wie in den angedeuteten Beweisen der Binomischen Formeln).

¹² Denn nach dem Satz des Pythagoras gilt außerdem: $a^2 \cdot \cos^2\gamma + a^2 \cdot \sin^2\gamma = e^2 + d^2 = a^2$.

$a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \cos^2 \beta - 2ab \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta$. Und wegen $d = a \cdot \cos \alpha = b \cdot \cos \beta$ ergibt sich daraus die obige zweite Gleichung.

Ein guter Einführungstext, in dem diese und andere grundlegenden Resultate (nicht nur) der Trigonometrie nicht bloß formal abgeleitet, sondern anschaulich begründet werden, ist: Wellstein, Hartmut und Kirsche, Peter: *Elementargeometrie – Eine aufgabenorientierte Einführung*, Vieweg + Teubner, 2009.

Mit den obigen *Additionstheoremen für Sinus und Kosinus* ergibt sich für die im Buch auf Seite 91 rechts abgebildeten komplexen Zahlen:

$$\begin{aligned} (a + ib) \cdot (a' + ib') &= r(\cos \alpha + i \cdot \sin \alpha) \cdot r'(\cos \alpha' + i \cdot \sin \alpha') = \\ rr'(\cos \alpha \cdot \cos \alpha' - \sin \alpha \cdot \sin \alpha' + i(\sin \alpha \cdot \cos \alpha' + \cos \alpha \cdot \sin \alpha')) &= \\ rr'(\cos(\alpha + \alpha') + i \cdot \sin(\alpha + \alpha')) \end{aligned}$$

Diesen Zusammenhang nutzt der Tischler, wenn er die geometrische Fassung seines Keilproblems in die einfache komplex-rechnerische übersetzt.

Galton-Brett und Zentraler Grenzwertsatz

Die im Galton-Brett-Beispiel einschlägige Version des Zentralen Grenzwertsatzes lautet:

Sei X_1, X_2, X_3, \dots eine Folge unabhängiger, identisch verteilter Zufallsvariablen mit endlichem Erwartungswert μ und endlicher Standardabweichung $\sigma > 0$. Dann konvergiert die standardisierte Mittelwertfolge der Ausgangfolge in Verteilung gegen die Standardnormalverteilung. Das heißt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{(X_1 + \dots + X_n)/n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < z\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{1}{2}y^2} dy \quad \forall z \in \mathbb{R}$$

Eine gute Quelle für ein gediegenes Verständnis dessen, was das genau besagt ist: Bauer, Heinz: *Wahrscheinlichkeitstheorie*, de Gruyter, 2002. Um allen Ausführungen Bauers folgen zu können, empfiehlt sich die vorherige Lektüre eines weiteren Titels desselben Autors: *Maß- und Integrations-theorie*, de Gruyter, 1992.

Für diejenigen, die diese mathematisch anspruchsvolle Lektüre scheuen, heißt es vereinfacht auf das Galton-Brett bezogen: Jedes X_m ($1 \leq m \leq n$) gibt an, ob die betreffende Erbse auf der m-ten Ebene nach links ($X_m = 0$) oder nach rechts ($X_m = 1$) fällt. Und wenn für eine beliebige Zahl z die Gesamtzahl n an Ebenen nur groß genug ist, so beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass $X_1 + \dots + X_n$ kleiner als $\frac{z\sqrt{n} + n}{2}$ ist,¹³ ungefähr dem Integralwert $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{1}{2}y^2} dy$. Somit lässt sich für hinreichend großes n die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Erbse schließlich in einem bestimmten Schlitz landet, mittels der Glockenfunktion $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2}$ abschätzen.¹⁴

Quantenmechanisches Grundrezept

Betrachten wir (idealisiert) ein Teilchen der Masse m , das sich entlang der x -Achse zwischen zwei unendlich hohen, unüberwindbaren „Energiebarrieren“ an den Stellen 0 bzw. L frei, ohne jeglichen (sonstigen) äußeren Einfluss hin und her bewegen kann. Nach klassischer Vorstellung kann das Teilchen eine beliebige (kinetische) Energie besitzen. Doch nicht so in der Quantenmechanik, wonach die Energie des Teilchens nur einen der *diskreten* Eigenwerte E_1, E_2, E_3, \dots des *Hamilton-Operators* $\hat{H} =$

¹³ $\mu = \sigma = \frac{1}{2}$

¹⁴ $X_1 + \dots + X_n$ entspricht ja der Nummer des Schlitzes (von links und ab 0 gezählt), und wenn man das Integral für z_1, z_2 auswertet und die Ergebnisdifferenz bildet, erhält man näherungsweise die Wahrscheinlichkeit dafür, dass $X_1 + \dots + X_n$ zwischen $\frac{z_1\sqrt{n} + n}{2}$ und $\frac{z_2\sqrt{n} + n}{2}$ liegt.

$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V$ annehmen kann – mit $V = 0$ innerhalb des Intervalls $(0, L)$ und $V = \infty$ außerhalb davon. (Siehe zum Beispiel: Griffiths, David J.: *Quantenmechanik – Lehr- und Übungsbuch*, Pearson, 2012.) Denn die Wellenfunktion $\Psi(x, T)$ zum Zeitpunkt T einer möglichen Energiemessung lässt sich eindeutig als Summe $\sum c_n \psi_n$ mit $\hat{H}(\psi_n) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial x^2} = E_n \psi_n$ schreiben. Und da der Hamilton-Operator mathematisch für die Energie steht, führt die Energiemessung nach der Kopenhagener Deutung zu einem Kollaps von $\Psi(x, T)$ in eine Eigenfunktion ψ_n mit dem Messwert E_n . Die betreffende Wahrscheinlichkeit $|c_n|^2$ hängt dabei von der Ausgangswellenfunktion $\Psi(x, 0)$ ab. Mit dieser Wahrscheinlichkeit wird sich für die Energie des Teilchens der Messwert $n^2 \pi^2 \hbar^2 / 2mL^2 (= E_n)$ ergeben.

Wie im Buch erwähnt, gestaltet sich die Sache für den *Positionoperator* $\hat{X}: \Psi(x, t) \rightarrow x\Psi(x, t)$ etwas komplizierter. Verkürzt gesagt, fungieren in einem erweiterten Hilbertraum die „Funktionen“ $\delta_x: y \rightarrow \delta(x - y)$ als Eigenfunktionen von \hat{X} , jeweils mit dem Eigenwert x . Hierbei ist δ die Dirac-Funktion mit der praktischen Eigenschaft, dass sich die Wellenfunktion Ψ eines beliebigen Teilchens zum Zeitpunkt T der Messung seiner Position als Integral darstellen lässt: $\Psi(x, T) = \int \Psi(y, t) \delta(x - y) dy = \int \Psi(y, T) \delta_x(y) dy$. Nach dem quantenmechanischen Grundrezept bzw. der *Bornschen Regel* ist somit $|\Psi(x, T)|^2 dx$ die Wahrscheinlichkeit dafür, das Teilchen an der Stelle x (bzw. im infinitesimalen Intervall dx um x) zu messen.

Alternativen zur Kopenhagener Deutung

Neben der de-Broglie-Bohmschen Mechanik gibt es weitere Alternativdeutungen in Konkurrenz zur Kopenhagener Deutung, etwa die in Science-Fiction-Filmen und –Romanen gern zitierte „Viele-Welten-Theorie“ von Hugh Everett. Einen hervorragenden Überblick über diese Alternativen und ihre Pros und Kontras gegenüber der Kopenhagener Deutung bietet: Norsen, Travis: *Foundations of Quantum Mechanics – An Exploration of the Physical Meaning of Quantum Theory*, Springer, 2017. Norsen spult (in diesem leider nicht auf Deutsch erhältlichen Text) nicht bloß das übliche Standardprogramm aus anderen Lehrbüchern zur Quantenmechanik ab, sondern hinterfragt, was das Ganze zu *bedeuten* hat. Sind die oft vagen, manchmal gar den Hauch des Mystischen atmenden Kommentare von Bohr und Heisenberg wirklich der Weisheit letzter Schluss? Norsen legt überzeugend dar, weshalb daran stark zu zweifeln ist.

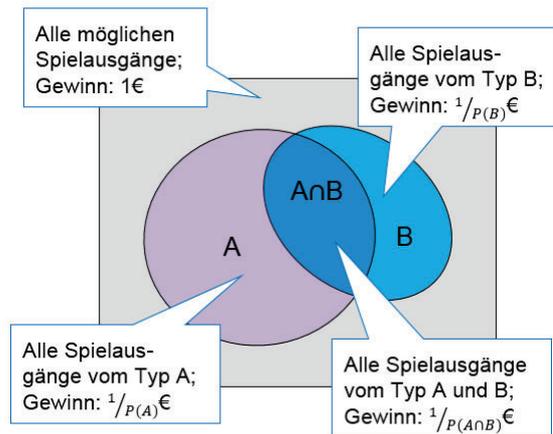
Kapitel 6

Bedingte Wahrscheinlichkeit und Satz von Bayes

Die Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ lässt sich beispielsweise anhand eines fairen Spielkasinos motivieren, in dem im Falle eines Gewinnereignisses gerade der Einsatz geteilt durch die Gewinnwahrscheinlichkeit ausgezahlt wird:¹⁵

¹⁵ Reale Spielcasinos sind in diesem Sinne nicht fair; so wird etwa beim Setzen auf Schwarz im Roulette das Doppelte des Einsatzes ausgezahlt, wenn die Kugel auf Schwarz landet. Wegen der „grünen“ 0 ist die Wahrscheinlichkeit aber ein wenig kleiner als $\frac{1}{2}$. Deshalb liegt der faire Gewinn etwas über dem Doppelten.

- Ein Spieldurchgang ist ohne mein Wissen bereits durchgeführt worden, ich darf aber nachträglich noch setzen.
- Der Spielleiter teilt mir zudem heimlich mit, dass B eingetreten ist.
- Nun setze ich 1€ auf B und $1/P(B)$ € auf $A \cap B$. Dadurch erhalte ich $1/[P(B) \cdot P(A \cap B)]$ €, falls $A \cap B$ eingetreten ist.
- Da ich effektiv nur 1€ aufs Spiel gesetzt habe, dürfte ich als fairen Gewinn aber nur $1/P(A \cap B)$ erhalten.



- Um mein unfaires Zusatzwissen auszugleichen, muss also für mich der mit $A \cap B$ verbundene Gewinn auf das $P(B)$ -fache reduziert werden.
- Die entsprechende Wahrscheinlichkeit $P(A|B) = P(A \cap B|B)$ beträgt $P(A \cap B)/P(B)$.¹⁶

Mit der so motivierten Formel für die bedingte Wahrscheinlichkeit ergibt sich der Satz von Bayes durch simples Einsetzen:

$$\frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B|A) \cdot P(A) + P(B|\neg A) \cdot P(\neg A)} = \frac{\frac{P(A \cap B)}{P(A)} \cdot P(A)}{\frac{P(A \cap B)}{P(A)} \cdot P(A) + \frac{P(\neg A \cap B)}{P(\neg A)} \cdot P(\neg A)} =$$

$$\frac{P(A \cap B)}{P(A \cap B) + P(\neg A \cap B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A|B)$$

Ziegenproblem

Mit dem Satz von Bayes lässt sich auch das Ziegenproblem leicht lösen. Hierzu können wir o.B.d.A.¹⁷ annehmen, der Kandidat habe die erste Tür gewählt und die Quizmasterin habe die zweite Tür geöffnet. Den Kandidaten interessieren nun die bedingten Wahrscheinlichkeiten $P(A_1|Q_2)$ und $P(A_3|Q_2)$, wobei „A“ und „Q“ für das Auto bzw. die Quizmasterin stehen sollen und die Indizes für die betreffende Tür:

$$P(A_1|Q_2) = \frac{P(Q_2|A_1) \cdot P(A_1)}{P(Q_2|A_1) \cdot P(A_1) + P(Q_2|\neg A_1) \cdot P(\neg A_1)} = \frac{1/2 \cdot 1/3}{1/2 \cdot 1/3 + 1/2 \cdot 2/3} = \frac{1}{3}$$

$$P(A_3|Q_2) = \frac{P(Q_2|A_3) \cdot P(A_3)}{P(Q_2|A_3) \cdot P(A_3) + P(Q_2|\neg A_3) \cdot P(\neg A_3)} = \frac{1 \cdot 1/3}{1 \cdot 1/3 + 1/4 \cdot 2/3} = \frac{2}{3}$$

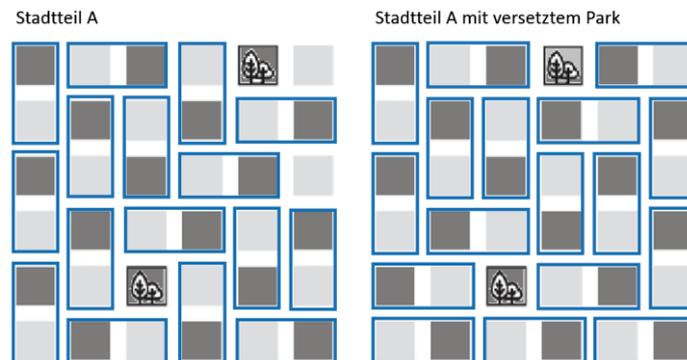
¹⁶ Wenn ich bereits weiß, dass B eingetreten ist, dann ist *meine* Wahrscheinlichkeit für $A \cap B$ offenbar genauso hoch wie für A. Das besagt gerade: $P(A|B) = P(A \cap B|B)$.

¹⁷ Diese in mathematischen Texten immer wieder anzutreffende Abkürzung steht für „ohne Beschränkung der Allgemeinheit“. Wenn man beispielsweise für ein Dreieck mit den Seiten a, b, c zeigen will: $a < b + c$, $b < a + c$ und $c < a + b$, so muss man nicht jede dieser Ungleichungen einzeln herleiten. Man kann vielmehr o.B.d.A. annehmen, dass a die längste Seite ist, und sich dann auf die erste Ungleichung beschränken. Denn wenn die längste Seite kürzer ist als die beiden übrigen zusammen, so gilt dies für die beiden übrigen Seiten jeweils erst recht. Und wenn a nicht die längste Seite sein sollte, dann werden die Seiten eben einfach passend umbenannt. (Der Fall, dass es keine eindeutige längste Seite gibt, erledigt sich gewissermaßen von selbst.)

Denn wenn das Auto hinter der ersten Tür steht, kann die Quizmasterin nach Belieben, sprich mit gleicher Wahrscheinlichkeit, eine der beiden anderen Türen auswählen: $P(Q_2|A_1) = P(Q_3|A_1) = \frac{1}{2}$. Und wenn das Auto nicht hinter der ersten Tür steht, so steht es entweder hinter der zweiten Tür oder, mit gleicher Wahrscheinlichkeit, hinter der dritten Tür. Nur in letzterem Fall kann und muss die Quizmasterin die zweite Tür wählen. Das heißt: $P(Q_2|\neg A_1) = \frac{1}{2}P(Q_2|A_2) + \frac{1}{2}P(Q_2|A_3) = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$. Ferner gilt ganz analog: $P(Q_2|\neg A_3) = \frac{1}{2}P(Q_2|A_1) + \frac{1}{2}P(Q_2|A_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 0 = \frac{1}{4}$.

Leserbrief

Die Beweisidee, mit der die Mathematikstudentin der Columbia University die Erklärung des Soziologen als verfehlt entlarvte, veranschaulicht folgende Abbildung am Stadtteil A noch etwas deutlicher:



Mit versetztem Park (rechts) ist eine Überdeckung der sozioökonomisch vorteilhaften Art möglich, da gleich viele „helle“ wie „dunkle“ Blöcke vorhanden sind. Mit der tatsächlichen Lage der Parks (links) ist hingegen maximal eine Überdeckung möglich, die zwei „helle“ Blöcke übrig lässt. Denn die Parks besetzen zwei „dunkle“ Blöcke.

Diese Beweisidee stammt übrigens nicht von mir; ich habe sie einer Aufgabe aus dem *Bundeswettbewerb Mathematik* für Schüler der Mittel- und Oberstufe entliehen. Diese Idee ist wiederum nur eine spezielle Ausgestaltung des allgemeinen *Invarianzprinzips*. Es handelt sich hierbei um ein mächtiges Beweisprinzip, mit dem insbesondere die Unmöglichkeit bestimmter Konstruktionen gezeigt werden kann, indem man auf eine Größe verweist, die bei jeder solchen Konstruktion unverändert erhalten bleiben müsste.

Restklassen

Dass man mit Restklassen (fast) genauso rechnen kann wie mit Zahlen, mag zunächst verblüffen, aber im Grunde ist es einfach eine Setzung; wir *definieren* schlicht die Addition und Multiplikation für Restklassen so, dass allgemein gilt: $[a]_m + [b]_m = [a + b]_m$ und $[a]_m \cdot [b]_m = [a \cdot b]_m$. Ganz so einfach ist die Sache allerdings doch nicht. Denn man muss noch zeigen, dass die Definition nicht von den konkreten Stellvertreterzahlen der Restklassen abhängt. Das heißt, wenn a' und b' zur selben Restklasse wie a bzw. b gehören, muss sichergestellt sein, dass $a' + b'$ und $a' \cdot b'$ zur selben Restklasse wie $a + b$ bzw. $a \cdot b$ gehören:

Sei also $a' = a + km$ und $b' = b + lm$ für irgendwelche ganzen Zahlen k, l . Dann gilt:

$$a' + b' = a + km + b + lm = a + b + (k + l)m$$

$$a' \cdot b' = (a + km)(b + lm) = ab + alm + bkm + klm^2 = a \cdot b + (al + bk + klm)m$$

$(a' + b') - (a + b)$ und $a' \cdot b' - a \cdot b$ sind also Vielfache von m , und das ist genau das, was für die Eindeutigkeit der Definition verlangt war.

Daraus folgt insbesondere: $([a]_m)^n = \underbrace{[a]_m \cdot \dots \cdot [a]_m}_{n\text{-mal}} = [a^n]_m$. Und die Bewiese für die beiden Rechenricks mit den Quersummen bzw. –differenzen lauten damit zugleich bündiger und genauer:

$$\begin{aligned} \left[\sum_{n=0}^N a_n 10^n \right]_3 &= \sum_{n=0}^N [a_n]_3 \cdot [10^n]_3 = \sum_{n=0}^N [a_n]_3 \cdot ([10]_3)^n = \sum_{n=0}^N [a_n]_3 \cdot ([1]_3)^n \\ &= \sum_{n=0}^N [a_n]_3 \cdot [1^n]_3 = \sum_{n=0}^N [a_n]_3 \cdot [1]_3 = \sum_{n=0}^N [a_n]_3 = \left[\sum_{n=0}^N a_n \right]_3 \\ \left[\sum_{n=0}^N a_n 10^n \right]_{11} &= \sum_{n=0}^N [a_n]_{11} \cdot [10^n]_{11} = \sum_{n=0}^N [a_n]_{11} \cdot ([10]_{11})^n = \sum_{n=0}^N [a_n]_{11} \cdot ([-1]_{11})^n \\ &= \sum_{n=0}^N [a_n]_{11} \cdot [(-1)^n]_{11} = \sum_{n=0}^N [(-1)^n a_n]_{11} = \left[\sum_{n=0}^N (-1)^n a_n \right]_{11} \end{aligned}$$

Mehr Informationen zu diesem und vielen weiteren Büchern aus dem Verlag C.H.Beck finden Sie unter: www.chbeck.de